# 18. Определения устойчивости нелинейной системы

А.2. Определения устойчивости

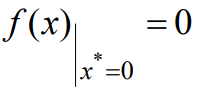
Будем рассматривать нестационарную нелинейную систему вида 

где x — n -мерный вектор состояния. Обозначим через начальное значение вектора состояния, т.е. значение вектора x в начальный момент времени . Решение системы (А.3), полученное при начальных условиях , обозначим через .

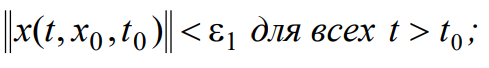
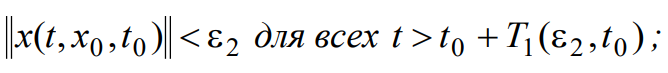
Замечание А.1. Более простым является класс стационарных нелинейных систем, т. е. систем, правые части дифференциальных уравнений которых не зависят в явном виде от времени t:

 **Система А.3**

Свойства стационарных систем не изменяются с течением времени и, поэтому без потери общности в качестве начального момента времени можно выбрать нулевое значение . При этом начальное значение вектора состояния обозначается .

Пусть точка  является состоянием равновесия системы (А.3), т.е.  для всех t.

**Определение А.3.** Состояние равновесия x\* = 0 системы (А.3) называется:

1. устойчивым по Ляпунову (или просто — устойчивым), если для любого сколь угодно малого числа  существует число  (зависящее в общем случае от ), такое, что из выполнения неравенства  следует справедливость неравенства  **Система А.4**
2. асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, дополнительно, для любого положительного числа ε2 < ε1 существуют положительные числа , такие, что из выполнения неравенства  следует справедливость неравенства  **Система А.5**
3. равномерно асимптотически устойчивым, если оно асимптотически устойчиво и, дополнительно, константы  не зависят от начального момента времени ;
4. экспоненциально устойчивым, если существует такое положительное число Δ2 > 0, что из выполнения неравенства  следует справедливость неравенства

 **Система А.6**

где α и β — некоторые положительные константы

**Определение А.4.** Состояние равновесия x\*=0 системы (А.3) называется неустойчивым, если оно не является устойчивым по Ляпунову.

Если неравенства (А.5) и (А.6) выполняются при любых начальных значениях , то соответствующие свойства устойчивости называются *глобальными*. Если система имеет единственное состояние равновесия с глобальными свойствами устойчивости, то можно говорить об устойчивости самой системы. Обсудим введенные определения. Устойчивость по Ляпунову означает, что для любого сколь угодно малого числа ε1 всегда найдется множество начальных условий с ненулевым радиусом δ1, такое, что любая траектория  , начавшаяся внутри данного множества, не выйдет за пределы ε1 - окрестности нулевого состояния равновесия.

Асимптотическая устойчивость означает, что для фиксированного множества начальных условий  всегда можно найти конечный интервал времени T, такой, что норма вектора состояния станет меньше любого сколь угодно малого числа ε2. Другими словами, это означает сходимость траекторий к нулевому состоянию равновесия и выполнение условия



Равномерная асимптотическая устойчивость дополнительно означает, что скорость сходимости не зависит от начального момента времени t0.

Наконец, экспоненциальная устойчивость означает, что скорость сходимости не меньше, чем у показательной функции.

Напомним также, что из более строгого типа устойчивости следует справедливость менее строгих типов (в определении А.2 типы устойчивости даны в порядке возрастания их “силы”). Обратное утверждение не справедливо, за исключением определенных классов динамических систем.

Для нелинейных стационарных систем из асимптотической устойчивости следует равномерная асимптотическая устойчивость (но не следует экспоненциальная).

Проиллюстрируем введенные понятия примерами следующих простых систем:



нелинейная стационарная система является равномерно асимптотически устойчивой (но не является экспоненциально устойчивой).